#【数学】

##【I】

問1 $n \times n$ 実行列 $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ について，以下を証明せよ．ただし，上付きの -1 は行列の逆行列を表す．

(i) $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ が正則ならば，$\mathbf{A}(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}\mathbf{A}$

(ii) $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ が共に正則ならば，$\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{B}^{-1}$

(iii) $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ が全て正則ならば，$(\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}$

問2 以下の $n \times n$ $(n \geq 2)$ 行列 $\mathbf{A}_n$ の逆行列を求めたい．ただし，$\mathbf{A}_n$ の対角成分は，(n,n) 成分のみ1で，残りは2である．

$$\mathbf{A}_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(i) $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ．

(ii) $\mathbf{A}_n$ の逆行列を求めよ．また，求めたものが実際に $\mathbf{A}_n$ の逆行列となっていることを示せ．

問3 2×2 行列 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ について，以下の設問に答えよ．

(i) ある 2×2 行列 $\mathbf{P}$, ある実数 λ_1, λ_2（ただし，$\lambda_1 \geq \lambda_2$ とする）を用いて，

$\mathbf{A} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}$ とすることができる．$\mathbf{P}$, λ_1, λ_2 を求めよ．ただし，$\mathbf{P}$ については条件に合致するものを一つ求めれば良い．

(ii) 実数 t について，

$$\exp(t\mathbf{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty}\left(\mathbf{I}+\frac{t}{n}\mathbf{A}\right)^n$$

で定義される $\exp(t\mathbf{A})$ を，設問(i)の結果を使って求めよ．ここで，$\mathbf{I} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ である．

（数学の問題は次ページに続く）

【数学】（続き）

【II】

問 1 n, N は自然数とする．以下の設問に答えよ．

(i) 関数

$$f(x) = e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

の符号を調べることにより，$x > 0$ のとき不等式

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} < e^x$$

が成り立つことを示せ．

(ii) 関数

$$g(x) = e^x - \frac{x}{n}e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

の符号を調べることにより，$x > 0$ のとき不等式

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} > e^x - \frac{x}{n}e^x$$

が成り立つことを示せ．

(iii) 関数 $F(t)$ を

$$F(t) = \int_0^t e^{-x} \sum_{k=0}^{2N} \frac{x^k}{k!}\, dx$$

によって定義する．設問 (i) および (ii) の結果を使って，t に関する方程式 $F(t) = N$ が区間 $(N, 2N)$ に少なくとも 1 つ解をもつことを示せ．

問 2 関数 $f(x)$ は区間 $[a, b]$ 上で微分可能で，導関数 $f'(x)$ は連続である．また，$f(a) = 0$ である．このとき，以下の設問に答えよ．

(i) $a \leq x \leq b$ に対して，

$$g(x) = \int_a^x |f'(t)|\, dt$$

とおく．$|f(x)| \leq g(x)$ が成り立つことを示せ．

(ii) 設問 (i) の結果を使い，さらに $|f'(x)| = g'(x)$ および $g(a) = 0$ であることに注意して，不等式

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|\, dx \leq \frac{b-a}{2} \int_a^b \left[f'(x)\right]^2 dx$$

が成り立つことを示せ．