平成２２年度１０月期入学
平成２３年度　４月期入学

京都大学大学院情報学研究科修士課程

システム科学専攻

入学資格者選考試験問題

【数学】

試験日時：平成２２年８月１０日（火）　午前１０時００分より正午まで

問題冊子頁数（表紙、裏表紙を除いて）：　３頁

注意：

（１）すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

（２）問題番号【Ⅰ】、【Ⅱ】、【Ⅲ】のそれぞれについて最大２枚ずつの解答用紙を使用して別々に解答すること。その際、各解答用紙に試験科目名、問題番号【Ⅰ】、【Ⅱ】、【Ⅲ】を忘れずに記入すること。

（３）解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる上部を空白にしておくこと。（この上部は切り離すので、点線部分より下側を使用すること）

（４）解答用紙は記入の有無にかかわらず持ち帰ってはならない。

【数学】

【I】

問 1　以下の設問に答えよ．

(i)　実数 x について，無限級数 $\lim_{M\to\infty}\sum_{m=0}^{M}(-x)^m$ が収束するとき，以下を計算せよ．ただし，$x^0 \equiv 1$ とする．

$$(1+x)\lim_{M\to\infty}\sum_{m=0}^{M}(-x)^m$$

(ii)　$n\times n$ 実行列 $\mathbf{A}$ について，ある自然数 k があり，$\mathbf{A}^k=\mathbf{O}_n$ とする．この時，$\mathbf{I}_n+\mathbf{A}$ は正則であることを示せ．ここで$\mathbf{O}_n$ と $\mathbf{I}_n$ は，それぞれ，$n\times n$ 零行列，$n\times n$ 単位行列である．

(iii)　以下の行列 $\mathbf{B}$ と行列 $\mathbf{C}$ について，$\mathbf{B}$ の逆行列を $\mathbf{C}$ の多項式として表現せよ．必要ならば，5×5 単位行列 $\mathbf{I}_5$ を用いて良い．

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&-1&0&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

問 2　以下の設問に答えよ．

(i)　以下の 2 つの行列の行列式の値をそれぞれ求めよ．

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}\qquad\qquad \begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

(ii)　d 次元実線形空間における $n\,(2\le n\le d)$ 個の d 次元ベクトル $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_n$ が線形独立であるとき，n 個のベクトル

$\mathbf{b}_1=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$

$\mathbf{b}_k=\mathbf{a}_{k-1}+\mathbf{a}_k+\mathbf{a}_{k+1}\ (k=2,\dots,n-1)$　　$n\ge 3$ のとき

$\mathbf{b}_n=\mathbf{a}_{n-1}+\mathbf{a}_n$

は線形独立であるか否か，理由（証明）をつけて答えよ．

（数学の問題は次ページに続く）

【II】

問 1 無限乗積

$$\prod_{k=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$$

が収束するかどうかを調べ，収束する場合にはその値を答えよ．ただし，記号 $\prod$ の意味は以下に示す通りである:

$$\prod_{k=2}^{n} a_k = a_2 a_3 \cdots a_n, \qquad \prod_{k=2}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n} a_k$$

問 2 (i) 100 から 999 までの 3 桁の自然数 900 個のなかで，十進数としての表示にゼロ「0」を含まない数は何個あるか答えよ．

(ii) k を自然数とする．十進数で表したとき k 桁であるようなすべての自然数のなかで，十進数としての表示にゼロ「0」を含まない数の個数を答えよ．

(iii) 十進数としての表示にゼロ「0」を含まないようなすべての自然数からなる集合を $\mathbf{A}$ とする．このとき，級数

$$\sum_{n\in\mathbf{A}}\frac{1}{n}$$

が収束することを示せ．

(数学の問題は次ページに続く)

【III】

以下の設問に答えよ．

(i) 実変数 a, b, c, d および正の定数 $D > 0$ に対して，条件 $ad - bc = D$ が成り立っているとき，ラグランジュの未定乗数法を使って $J_2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ の最小値を求めよ．

(ii) n を 2 以上の自然数とし，$n \times n$ 実行列 $X = (x_{ij})$ の行列式を $|X|$ とする．また，行列 X の第 (i, j) 余因子を $\tilde{X}_{ij}$ とする．このとき，任意の $i = 1, 2, \ldots, n$ に対し，

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\tilde{X}_{ij} = |X|$$

が成り立つ．また，$\tilde{X}_{ji}$ を第 (i, j) 成分とする行列 (余因子行列) を $\tilde{X}$ とおくと，関係式

$$X\tilde{X} = |X| \times I$$

が成り立つ．ただし，I は単位行列である．

(a) $|X| \neq 0$ であるとき，余因子行列 $\tilde{X}$ の行列式 $|\tilde{X}|$ を求めよ．

(b) 正の定数 $D > 0$ に対して条件 $|X| = D$ が成り立っているとき，$J_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2$ の最小値を求めよ．