平成２４年度　４月期入学

京都大学大学院情報学研究科修士課程

システム科学専攻

入学資格者選考試験問題

【数学】

試験日時：平成２３年８月９日（火）　午前１０時００分より正午まで

問題冊子頁数（表紙を除いて）：　２頁

注意：

（１）すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

（２）問題番号【Ｉ】、【Ⅱ】のそれぞれについて最大３枚ずつの解答用紙を使用して別々に解答すること。その際、各解答用紙に試験科目名、問題番号【Ｉ】、【Ⅱ】を忘れずに記入すること。

（３）解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる上部を空白にしておくこと。（この上部は切り離すので、点線部分より下側を使用すること）

（４）解答用紙は記入の有無にかかわらず持ち帰ってはならない。

【数学】

【I】

問１　以下の設問に答えよ．

(i) 複素行列 $\mathbf{H} \equiv (h_{i,j})$ がエルミート行列，すなわち $\bar{h}_{i,j} = h_{j,i}$ であるとき，その固有値は全て実数であることを証明せよ．ここで，$\bar{h}$ は h の共役を表す．

(ii) 以下の二つの実行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ について，それぞれの n 乗である $\mathbf{A}^n$, $\mathbf{B}^n$ を求め，その解が正しいことを証明せよ．ここで，n は自然数，a, b は実数とする．

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

問２　ある都市の８月の気温を長年にわたって調べたら興味深いことが分かった．各年，ある日が真夏日になるかどうかは，その前日が真夏日であるかどうかのみによっており，かつ，確率的である．各年，真夏日となった翌日は，その３分の２がやはり真夏日となり，残りの３分の１は真夏日でない．また，真夏日でない日の翌日は，その４分の３がやはり真夏日でないが，残りの４分の１は真夏日になる．以上のことから，ある年の８月 k 日（$k = 1,2,\dots,31$）が真夏日である確率を h_k $(h_k \geq 0)$，真夏日でない確率を c_k $(c_k \geq 0)$ と表すと，

$$\begin{pmatrix} h_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} h_k \\ c_k \end{pmatrix}$$

と書くことができる．以下の設問に答えよ．

(i) 行列 $\mathbf{A}$ とその固有値を求めよ．

(ii) ある 2×2 行列 $\mathbf{P}$ とその逆行列 $\mathbf{P}^{-1}$ を用いて，$\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ と対角化することができることを示せ．ここで，$\mathbf{D}$ はその対角成分のみに非零の値を持つ行列である．

(iii) 今年の８月１日が真夏日であったとして，８月 $(d+1)$ 日 $(d = 0,\dots,30)$ が真夏日となる確率を求めよ．

（数学の問題は次ページに続く）

【II】

問 1 正の整数 m に対し，以下のように定義された関数 $f(x)$ を考える．

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^{2m}}\right) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

ただし $\exp(y)$ は e^y を意味する．このとき以下の設問に答えよ．

(i) $m = 1$ のときの $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ の概形を描け．

(ii) 非負の整数 γ に対し，

$$\lim_{x \to 0} x^{-\gamma} \exp\left(-\frac{1}{x^{2m}}\right) = 0$$

となることを示せ．

(iii) $x = 0$ のときの $f(x)$ の定義に注意して $f'(0)$ を求めよ．

(iv) n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ に対し，$f^{(n)}(0)$ を求めよ．

問 2 $n = 1, 2, \ldots$ に対し，関数 $f_n(x)$ と $g_n(x)$ を次のように定義する．

$$f_n(x) = \frac{e^{-x} - e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}}, \qquad g_n(x) = \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x}$$

このとき以下の設問に答えよ．

(i) $F_n = \int_0^\infty f_n(x)dx$ とするとき，F_n を求めよ．

(ii) $G_n = \int_0^\infty g_n(x)dx$ とする．$\int_1^n e^{-xy}dy$ を考えることにより，G_n を求めよ．

(iii) $F_n - G_n$ がすべての n に対して正であることを示せ．

(iv) $n \to \infty$ における $F_n - G_n$ の極限が存在することを示せ．