平成２５年度４月期入学

京都大学大学院情報学研究科修士課程

システム科学専攻

入学資格者選考試験問題

【数学】

試験日時：平成２４年８月７日（火）　午前１０時００分より正午まで

問題冊子頁数（表紙を除いて）：　３頁

注意：

（１）すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

（２）問題番号【Ｉ】、【Ⅱ】のそれぞれについて最大３枚ずつの解答用紙を使用して別々に解答すること。その際、各解答用紙に試験科目名、問題番号【Ｉ】、【Ⅱ】を忘れずに記入すること。

（３）解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる上部を空白にしておくこと。（この上部は切り離すので、点線部分より下側を使用すること）

（４）解答用紙は記入の有無にかかわらず持ち帰ってはならない。

【数学】

【I】

行列 A の転置と行列式をそれぞれ $A^\top$，$|A|$ のように表す．また，ベクトル x に対し，$\|x\|^2$ で $x^\top x$ を表す．

問 1　以下の設問に答えよ．

(i) $n \times m$ の行列 M の階数が m であることと，$|M^\top M| \neq 0$ が等価であることを証明せよ．

(ii) ブロック行列

$$\begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix}$$

の逆行列を求めよ．ただし，A，B，C はそれぞれ $n \times n$，$n \times m$，$m \times m$ の行列であり，$|A| \neq 0$，$|C| \neq 0$ を満たすものと仮定する．また，O は $m \times n$ の零行列である．

(iii) 行列

$$\begin{bmatrix} -5 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 9 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

の固有ベクトルのひとつが $[1 \ \ 2 \ \ a \ \ b \ \ 5]^\top$ であるという．a および b の値を求めよ．

(iv) 行列 $I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ が正則であることを証明せよ．ただし，A は $n \times n$ の行列，I は $n \times n$ の単位行列である．

（数学の問題は次ページに続く）

【数学】（続き）

問 2　ベクトル x, y に対して $x^{\top}y$ によって内積が定義された 4 次元実数ベクトル空間を考える．このとき，2 次元部分空間 W の基底 w_1，w_2 と，4 次元空間内の元 x を以下のように与える．

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

以下の設問に答えよ．

(i) w_1 が張る 1 次元部分空間（直線）を L とする．x を L へ正射影して得られるベクトルを求めよ．また，得られたベクトルと x のなす角 θ を求めよ．

(ii) 4 次元ベクトル u の W への正射影を，射影行列 P を用いて

$$y = Pu$$

と表現する．行列 P を求めよ．また，$u = x$ のときの y を求めよ．

(iii) W の直交補空間を $W^{\perp}$ として，4 次元ベクトル v の $W^{\perp}$ への正射影を射影行列 Q を用いて

$$z = Qv$$

と表現する．行列 Q を求めよ．また，$v = x$ のときの z を求めよ．

（数学の問題は次ページに続く）

【数学】（続き）

【II】

e を自然対数の底とする．

問 1 n を自然数とする．以下の設問に答えよ．

(i) 定積分を用いて以下を計算せよ．

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}$$

(ii) $|x| \leq \dfrac{1}{2}$ において，以下の不等式が成り立つことを示せ．

$$|\log_e(1+x)-x| \leq x^2$$

(iii) 設問 (i) および (ii) の結果を使って，以下を計算せよ．

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{2(n+i)-1}{2(n+i)}$$

問 2 f を区間 $(0,\infty)$ で微分可能な関数とする．以下の設問に答えよ．

(i) 関数 $g(x) = xf(\log_e x)$ を考えることにより，$0 < a < b$ に対し

$$\frac{e^b f(b) - e^a f(a)}{e^b - e^a} = f(c) + f'(c)$$

をみたす $c \in (a,b)$ が存在することを示せ．

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}[f(x)+f'(x)] = 0$ であるならば $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ であることを示せ．

(iii) h を C^3-関数とする．このとき，

$$\lim_{x\to\infty}[h(x)+h'(x)+h''(x)+h'''(x)] = 0$$

であり，かつ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$ でない例を示せ．