

平成26年度4月期入学

京都大学大学院情報学研究科修士課程

システム科学専攻

入学資格者選考試験問題

【数学】

試験日時：平成25年8月6日（火） 午前10時00分より正午まで

問題冊子頁数（表紙を除いて）： 3頁

注意：

- (1) すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。
- (2) 問題番号【I】、【II】のそれぞれについて最大3枚ずつの解答用紙を使用して別々に解答すること。その際、各解答用紙に試験科目名、問題番号【I】、【II】を忘れずに記入すること。
- (3) 解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる上部を空白にしておくこと。（この上部は切り離すので、点線部分より下側を使用すること）
- (4) 解答用紙は記入の有無にかかわらず持ち帰ってはならない。

【数学】

【I】

注意：【I】においては、行列 A の転置を A^\top で表す。また、ベクトルはすべて実列ベクトルとする。

問 1 以下の設間に答えよ。

- (i) x および b を n 次元ベクトル、 A を $n \times n$ の正定対称行列、 c をスカラ数とする。このとき、関数

$$f(x) = x^\top Ax + b^\top x + c$$

の極値および極値点を求めよ。

- (ii) $n \times n$ の実行列 A 、 B に対し、

$$\text{Ker}A \cap \text{Ker}B \subseteq \text{Ker}(A + B)$$

が成り立つことを証明せよ。ただし、 $\text{Ker}X$ は行列 X で表現される線形写像の核（零空間）を表す。

- (iii) 次の行列 A の固有値を求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & a & 0 \\ 1 & a & 0.5 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0.8 \end{bmatrix}$$

また、任意の 4 次元ベクトル x に対し、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k x = 0$$

となる実数 a の範囲を求めよ。ただし、 k は自然数である。

（数学の問題は次ページに続く）

【数学】 (続き)

問2 x, y, z についての連立一次方程式

$$3x + 2y + 1z = 0$$

$$3x + 1y + 2z = 0$$

$$ax + 2y + 3z = 0$$

が $x = y = z = 0$ 以外の解を持つ場合について、以下の設問に答えよ。

(i) 変数 x, y, z の係数を並べたベクトル k_x, k_y, k_z が線形従属 (1次従属) であることを示せ。

$$k_x = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ a \end{bmatrix}, \quad k_y = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad k_z = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(ii) 定数 a の値を求めよ。

(iii) この連立一次方程式は、行列 A を用いて

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

と書くことができる。このとき、行列 A の階数を求めよ。

(iv) 各方程式の係数を並べたベクトル k_1, k_2, k_3 を用意する。これらのベクトルすべてと直交するベクトルを求めよ。

$$k_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad k_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad k_3 = \begin{bmatrix} a \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(数学の問題は次ページに続く)

【数学】 (続き)

【II】

e を自然対数の底とする。

問 1 以下の設間に答えよ。

(i) 次の積分を求めよ。

$$\int_0^{\pi/2} \log(\sin \theta) d\theta$$

(ii) 積分 $\int_0^\infty ye^{-x^2y^2} dx$ は $1 \leq y \leq 2$ においては一様収束する。この事実を利用して、次の積分を求めよ。

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t^2} - e^{-4t^2}}{t^2} dt$$

問 2 関数 $f(x)$ は区間 $(0, \infty)$ において微分可能であり、その導関数を $f'(x)$ とする。また、 $f(x) = 0$ が ℓ 個の互いに異なる実数解 x_1, \dots, x_ℓ をもち、 $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_\ell$ とする。このとき、以下の設間に答えよ。

(i) 十分小さな任意の正数 $\epsilon > 0$ をとる。このとき、任意の $i \in \{1, 2, \dots, \ell - 1\}$ に対して $0 < \epsilon_1 < \epsilon$ および $0 < \epsilon_2 < \epsilon$ を満たす 2 つの正数 ϵ_1, ϵ_2 が存在して、

$$\operatorname{sgn} f'(x_i + \epsilon_1) = -\operatorname{sgn} f'(x_{i+1} - \epsilon_2) \neq 0$$

となることを、テイラーの定理を利用して示せ。ただし、 sgn は符号関数であり、以下を満たす。

$$\operatorname{sgn} y = \begin{cases} 1 & (y > 0) \\ 0 & (y = 0) \\ -1 & (y < 0) \end{cases}$$

(ii) $f'(x) = 0$ の実数解の個数を m とする。このとき $m \geq \ell - 1$ となることを設問 (i) の結果を利用して示せ。

(iii) $g(x) = e^x f(x)$ とおく。このとき $g'(x) = 0$ の実数解の個数を n とし、
 $f(x) + f'(x) = 0$ の実数解の個数を j とすると、 $n = j$ となることを示せ。

(iv) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x f(x) = 0$ という条件を追加した場合に、 $f(x) + f'(x) = 0$ の実数解の個数を k とする。このとき、 $k \geq \ell$ となることを設問 (ii), (iii) の結果を利用して示せ。