平成２８年度４月期入学

京都大学大学院情報学研究科修士課程

システム科学専攻

入学資格者選考試験問題

【数学】

試験日時：平成２７年８月６日（木）　午前１０時００分より正午まで

問題冊子頁数（表紙を除いて）：　３頁

注意：

（1）すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

（2）問題番号【Ⅰ】の問１、問２、問題番号【Ⅱ】の問１、問２のそれぞれについて別の解答用紙を使用して解答すること。その際、各解答用紙に試験科目名、問題番号【Ⅰ】の問１、問２、問題番号【Ⅱ】の問１、問２を忘れずに記入すること。

（3）解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる上部を空白にしておくこと。（この上部は切り離すので、点線部分より下側を使用すること）

（4）解答用紙は記入の有無にかかわらず持ち帰ってはならない。

【数学】

【I】

注意：【I】においては，複素行列 A の共役転置を A^*，ベクトル v の転置を $v^\top$，ベクトル v のユークリッドノルムを $\|v\|$ で表す．

問 1　以下の設問に答えよ．

(i)　3 次元実ベクトル空間において，媒介変数 p, q によって定義される平面

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

を考える．この平面を，α を係数ベクトル，x を変数ベクトルとする方程式 $\alpha^\top x = 1$ で表したとき，係数ベクトル α の値を求めよ．ただし，α と x はいずれも列ベクトルである．

(ii)　実数 x, y, α によって定義される不等式

$$x^2 + y^2 + \alpha xy > 0$$

を考える．この不等式が，$x = y = 0$ を除くすべての x, y の組に対して成立するための必要十分条件を α の範囲として求めよ．

(iii)　正方の複素行列 A がユニタリ行列によって対角化されるとき，$AA^* = A^*A$ が満たされることを証明せよ．

（数学の問題は次ページに続く）

問2　ベクトル x，y に対して $x^{\top}y$ によって内積が定義された N 次元実ベクトル空間 V を考える．ただし，ベクトルはすべて列ベクトルとする．この空間 V の基底を $\{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$ としたとき，以下の設問に答えよ．

(i)　a_1 を用いて

$$b_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}$$

とする．b_1 と直交する大きさ1のベクトル b_2 を，a_2 と b_1 の線形結合で表せ．さらに，b_1，b_2 と直交する大きさ1のベクトル b_3 を，a_3，b_1，b_2 の線形結合で表せ．

(ii)　V の M 次元部分空間 W の正規直交基底を $\{b_1, b_2, \ldots, b_M\}$ $(M < N)$ とする．V の元 v を W へ正射影して得られるベクトルを w とすると，v と w の関係は行列 S を用いて

$$w = Sv$$

と表すことができる．S を求めよ．

(iii)　V の元 v と，V の M 次元部分空間 W へ v を正射影して得られるベクトル w について，

$$\|w\| \leq \|v\|$$

が成り立つことを示せ．

（数学の問題は次ページに続く）

【数学】(続き)

【II】

問 1　正の整数 n に対して, x に関する以下の多項式を定義する.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \qquad Q_n(x) = (x^2-1)^n$$

ここで, $n!$ は n の階乗を表すものとする. すなわち, $n! = n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1$ とする. このとき, $l = 0, 1, \ldots, n-1$ に対して, 関数 Q_n の l 階導関数 $Q_n^{(l)}$ (ただし, $Q_n^{(0)} = Q_n$) は, $Q_n^{(l)}(1) = Q_n^{(l)}(-1) = 0$ を満たす. 以下の設問に答えよ.

(i) $\int_{-1}^{1} Q_n(x)dx$ を求めよ.

(ii) $P_n(x)$ は x に関する n 次多項式となる. x^n の係数を求めよ.

(iii) x に関する $n-1$ 次以下の任意の多項式 $h(x)$ に対して,

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)h(x)dx = 0$$

となることを示せ.

(iv) $\int_{-1}^{1}(P_n(x))^2 dx$ を求めよ.

問 2　$\mathbb{R}_+$ をすべての非負の実数からなる集合とし, 恒等的に零ではない連続関数 $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ が, 次式を満たしているとする.

$$f\left((x^p + y^p)^{\frac{1}{p}}\right) = f(x)f(y), \qquad x, y \in \mathbb{R}_+$$

ただし, p は正の整数とする. このとき, 以下の設問に答えよ.

(i) $f(0) = 1$ であることを示せ.

(ii) 任意の正の整数 n に対して, 次式が成り立つことを (帰納法などにより) 示せ.

$$f(n^{\frac{1}{p}}x) = (f(x))^n, \quad x \in \mathbb{R}_+$$

(iii) 任意の正の有理数 $r = \dfrac{n}{m}$ (m, n は正の整数) に対して,

$$f(r) = (f(1))^{r^p}$$

が成り立つことを示せ.

(iv) 設問 (iii) の結果を利用し, 関数 f がある実数 c を用いて以下のように表現されることを示せ.

$$f(x) = e^{cx^p}, \quad x \in \mathbb{R}_+$$

ただし, e はネイピア数 (自然対数の底) とする.

(数学の問題はここまで)