平成２８年度１０月期入学 / 平成２９年度４月期入学

京都大学大学院情報学研究科修士課程

システム科学専攻

入学者選抜　試験問題

【数学】

試験日時：平成２８年８月８日（月）　午前１０時００分より正午まで

問題冊子頁数（表紙、中表紙、裏表紙を除いて）：　２頁

注意：

（１）すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

（２）問題番号【Ｉ】の問１、問２，問題番号【Ⅱ】の問１，問２のそれぞれについて別の解答用紙を使用して解答すること。その際、各解答用紙に試験科目名、問題番号【Ｉ】の問１、問２，問題番号【Ⅱ】の問１，問２を忘れずに記入すること。

（３）解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる上部を空白にしておくこと。（この上部は切り離すので、点線部分より下側を使用すること）

（４）解答用紙は記入の有無にかかわらず持ち帰ってはならない。

【数学】

注意：【I】,【II】ともに，問ごとにそれぞれ別の解答用紙を使用すること．

【I】

注意：【I】においては，単位行列を E，正方行列 A の対角要素の総和を $\mathrm{trace}(A)$ で表す．また，行列 A の階数を $\mathrm{rank}(A)$ と記す．

問 1　以下の設問に答えよ．

(i)　行列 A に対して，$A^i = E$ となる 1 以上の整数 i が存在すれば，A は正則である．このことを証明せよ．

(ii)　X を変数とする以下の方程式を考える．ただし，X は実数を要素にもつ 2 次正方行列である．この方程式に解が存在するか否かを判定せよ．もし存在するのであれば，解のひとつを求めよ．

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} X + X \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(iii)　n 次正方行列 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ で表す．このとき，次の関係が成り立つことを証明せよ．

$$\mathrm{trace}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

問 2　実数を要素にもつ行列やベクトルを考える．以下の設問に答えよ．

(i)　$m \times n$ 行列 P と m 次元列ベクトル q が与えられたとき，$Pr = q$ を満たす n 次元列ベクトル r が存在するための必要十分条件は次の A，B，C のいずれとなるか．記号で答えよ．また，必要十分条件でないものすべてについて，そのことを示す反例を挙げよ．

A. $\mathrm{rank}(P) = \min(m, n)$

B. $\mathrm{rank}(P) = \mathrm{rank}(q)$

C. $\mathrm{rank}(P) = \mathrm{rank}([P, q])$

ここで，$[P, q]$ は P と q を並べた $m \times (n+1)$ 行列とする．

(ii)　S を $m \times n$ 行列，T を正則な n 次正方行列とするとき，次の関係が成り立つことを証明せよ．

$$\mathrm{rank}(S) = \mathrm{rank}(ST)$$

(iii)　次の行列 U が $\mathrm{rank}(U) > \mathrm{rank}(U^2)$ を満たすとき，実数 a, b を求めよ．

$$U = \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{bmatrix}$$

（数学の問題は次ページに続く）

【数学】(続き)

【II】

問 1　以下の級数は収束するか否か, 理由をつけて答えよ. なお, 収束する場合には, その値を求めよ. ただし, n は正の整数とする.

(i) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$

(ii) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+a}+\frac{1}{n+2a}+\cdots+\frac{1}{n+na}\right)$　　(ただし, a は正の定数とする)

(iii) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right)$

問 2　任意の非負整数 n に対して, A_n と B_n を次のように定義する.

$$A_n=\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}x\,dx,\qquad B_n=\int_0^{\pi/2}x^2\cos^{2n}x\,dx$$

また, π を円周率とし, 正の整数 m に対して,

$$\begin{aligned}(2m)!! &= 2m\cdot(2m-2)\cdots4\cdot2\\(2m-1)!! &= (2m-1)\cdot(2m-3)\cdots3\cdot1\end{aligned}$$

と定義する. さらに, $0!!=(-1)!!=1$ とする. このとき, 以下の設問に答えよ.

(i) A_n の定義式に対して部分積分を行うことで, 次式を示せ.

$$A_n=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2},\qquad n=0,1,\ldots$$

(ii) A_n の定義式に対して部分積分を 2 回行うことで, 次式を示せ.

$$A_n=n(2n-1)B_{n-1}-2n^2B_n,\qquad n=1,2,\ldots$$

(iii) 設問 (i) と (ii) の結果を用いて, 次式を示せ.

$$\frac{1}{n^2}=\frac{4}{\pi}\left(\frac{(2n-2)!!}{(2n-3)!!}B_{n-1}-\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}B_n\right),\qquad n=1,2,\ldots$$

(iv) 不等式 $x\le(\pi/2)\sin x$ $(0\le x\le\pi/2)$ を用いて, 次式を示せ.

$$B_n\le\frac{\pi^3}{8}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!},\qquad n=1,2,\ldots$$

(v) π を用いて $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2}$ を表わせ.

(数学の問題はここまで)