

【数学】

注意：【I】，【II】ともに，問ごとにそれぞれ別の解答用紙を使用すること。

【I】

問1 次の行列 A について以下の設問に答えよ。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(i) $A = PJP^{-1}$ となるような正則行列 P と次のような形式の行列 J が存在する。このとき，実数 a, b を求めよ。また， P をひとつ求めよ。

$$J = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

(ii) J^7 と A^7 を求めよ。

問2 3次元実数ベクトル空間について考える。部分空間 S が次のように与えられているとき，以下の設問に答えよ。

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid 2x = 2y = -z \right\}$$

(i) S の基底を求めよ。さらに， S への射影行列 Q を求めよ。

(ii) S の直交補空間 T の基底を求めよ。さらに， T への射影行列 R を求めよ。

(iii) Q の行列式， R の階数， Q^2 ，および QR を求めよ。

(数学の問題は次ページに続く)

【数学】(続き)

【II】

e をネイピア数(自然対数の底)とし, $\exp(x) = e^x$ とする.

問1 正の整数 N と実数 α を用いて, $e = \frac{\alpha}{N}$ と表記する. 以下の設問に答えよ.

(i) 指数関数 e^x のマクローリン展開を書け.

(ii) 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$(N-1)! \alpha - \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!} < 1$$

(iii) 設問(ii)の結果を用いて, 実数 α が整数ではないことを示せ.

問2 実数 x の関数

$$f(x) = \exp(-x - e^{-x}), \quad x \in (-\infty, \infty)$$

について, 以下の設問に答えよ.

(i) 次式で定義される $F(x)$ を計算せよ. ただし, 変数変換 $u = -e^{-t}$ を用いよ.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

(ii) 次の積分を計算せよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) f(x) dx$$

(iii) 実数 a, b は定数とする. 次の積分を計算せよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x-b) f(x-a) dx$$

(数学の問題はここまで)