２０１９年度１０月期入学 / ２０２０年度４月期入学

京都大学大学院情報学研究科修士課程

システム科学専攻

入学者選抜　試験問題

【数学】

試験日時：２０１９年８月５日（月）　午前１０時００分より正午まで

問題冊子頁数（表紙、中表紙、裏表紙を除いて）：　５頁

注意：

（１）すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

（２）問題番号【Ｉ】の問１、問２，問題番号【II】の問１，問２のそれぞれについて別の解答用紙を使用して解答すること。その際、各解答用紙に試験科目名、問題番号【Ｉ】の問１、問２，問題番号【II】の問１，問２を忘れずに記入すること。

（３）解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる上部を空白にしておくこと。（この上部は切り離すので、点線部分より下側を使用すること）

（４）解答用紙は記入の有無にかかわらず持ち帰ってはならない。

【数学】

【I】

注意：**問 1**，**問 2** はそれぞれ別の解答用紙に解答すること．

問 1　$\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 f の表現行列が A であるとして，以下の設問に答えよ．ただし，a は実数とする．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}$$

(i) 行列 A の階数 (ランク) が最小になる a の値を求めよ．また，このときの行列 A の階数を求めよ．

(ii) 行列 A の階数が最小になるとき，線形写像 f の核 (カーネル) を求めよ．また，このとき，f の像の正規直交基底を求めよ．

(iii) 行列 A が対角化できなくなる a の値を求めよ．

(iv) $a = 3$ のとき，行列 A は行列 B と相似であることを示せ．

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

（数学の問題は次ページに続く）

問2 以下の設問に答えよ．ただし，det は行列式，$\top$ は転置，行列の右上の -1 は逆行列を意味するものとし，問題文中の行列およびベクトルの成分，スカラーはすべて実数とする．また，n，m，l は正の整数とする．さらに，$m \times m$ 行列 S，$m \times l$ 行列 T，$l \times m$ 行列 U，$l \times l$ 正則行列 V について，$(m+l) \times (m+l)$ 行列 $\begin{bmatrix} S & T \\ U & V \end{bmatrix}$ と $S - TV^{-1}U$ が正則であれば，

$$\begin{bmatrix} S & T \\ U & V \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (S-TV^{-1}U)^{-1} & -(S-TV^{-1}U)^{-1}TV^{-1} \\ -V^{-1}U(S-TV^{-1}U)^{-1} & V^{-1} + V^{-1}U(S-TV^{-1}U)^{-1}TV^{-1} \end{bmatrix}$$

となる．

(i) 正則な $n \times n$ 行列 A，n 次元列ベクトル b，c，スカラー d について，以下が成り立つことを示せ．

$$\det \begin{bmatrix} A & b \\ c^\top & d \end{bmatrix} = (\det A) \times (d - c^\top A^{-1} b)$$

(ii) $n \geq 2$ とする．A を $n \times n$ 正定値対称行列とする．このとき，A^{-1} も $n \times n$ 正定値対称行列となり，スカラー $\alpha > 0$，$(n-1)$ 次元列ベクトル β，$(n-1) \times (n-1)$ 行列 Δ を用いて，

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta^\top \\ \beta & \Delta \end{bmatrix}$$

と表すことができる．$\tilde{A}$ を行列 A から最初の行と列を除いた $(n-1) \times (n-1)$ 小行列とするとき，

$$\tilde{A}^{-1} = \Delta - \frac{\beta\beta^\top}{\alpha}$$

となることを示せ．

(iii) 設問 (ii) の条件に加えて，$x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^\top$，また，$x$ の $(n-1)$ 次元部分ベクトルを $\tilde{x} = [x_2, x_3, \ldots, x_n]^\top$ とする．このとき，二次形式 $x^\top A^{-1} x$ は x_1 について二次式となるが，その二次式の x_1 に関する最小値は $\tilde{x}^\top \tilde{A}^{-1} \tilde{x}$ となることを示せ．

（数学の問題は次ページに続く）

(iv) 正方行列 A_n を以下のように定義する.

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_0 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{bmatrix},\ \ldots,\ A_{n+1} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{bmatrix}$$

いま，すべての n について A_n を正定値対称行列とするとき，$n \geq 2$ について，

$$\det A_{n+1} \leq \frac{(\det A_n)^2}{\det A_{n-1}}$$

となることを示せ.

（数学の問題は次ページに続く）

【II】

注意：各問題はそれぞれ別の解答用紙に解答すること.

問 1　xyz-空間上の有界な閉集合

$$D = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq z,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 1 \right\}$$

について考える. ただし, a, b は正の定数であるとする. 以下の設問に答えよ.

(i) 次のように変数 (r, θ, s) を変数 (x, y, z) に移す写像のヤコビ行列式を求めよ.

$$x = ar\cos\theta,\ y = br\sin\theta,\ z = s$$

ただし, $r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi/2$ であるとする.

(ii) 設問 (i) の写像によって xyz-空間上の集合 D に移される $r\theta s$-空間上の集合は

$$E = \{(r, \theta, s) : 0 \leq r \leq \boxed{}, 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq s \leq 1\}$$

と表される. このとき, 空欄 $\boxed{}$ に入る式を書け.

(iii) $\displaystyle\iiint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ を求めよ.

(iv) 以下の積分が有限となるような正の整数 ℓ, m, n の組のうち, $\ell + m \leq n$ を満たすものを全て求めよ.

$$\iiint_D \frac{x^\ell y^m}{z^n} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

(数学の問題は次ページに続く)

問 2　数列 $\{x_n : n = 1, 2, \dots\}$ を次のように定義する.

$$x_1 = 1, \quad x_n = \sin x_{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots$$

また, 2 つの実数値関数 f と g が, $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x) = 0$ を満たすとき, ランダウの記法によって, $f(x) = o(g(x))$ と表記する. ただし, $f(x) = o(1)$ は, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ を意味するものとする. 以下の設問に答えよ.

(i) 次の不等式が成り立つことを (帰納法などにより) 示せ.

$$0 < x_{n+1} < x_n, \qquad n = 1, 2, \dots$$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ の値を求めよ.

(iii) $\sin x$ のマクローリン展開を書け. ただし, x の 5 次以上の項は, ランダウの記法を利用してまとめて表記せよ.

(iv) 次式を満たす定数 a と b を求めよ.

$$\frac{1}{(\sin x)^2} = \frac{a}{x^2} + b + o(1)$$

(v) 設問 (ii) と (iv) の結果を利用して, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{x_{n+1}^2} - \dfrac{1}{x_n^2} \right)$ の値を導け.

(vi) 設問 (v) の結果を利用して, 次式が成り立つことを示せ.

$$\lim_{n\to\infty} n x_n^2 = 3$$

(数学の問題はここまで)