２０２１年度１０月期入学 / ２０２２年度４月期入学

京都大学大学院情報学研究科修士課程

システム科学専攻

入学者選抜　試験問題

【数学】

試験日時：２０２１年７月３１日（土）　午前１０時００分より正午まで

問題冊子頁数（表紙、中表紙、裏表紙を除いて）：　４頁

注意：

（１）すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

（２）問題番号【Ｉ】の問１、問２、問題番号【Ⅱ】の問１、問２のそれぞれについて別の解答用紙を使用して解答すること。その際、各解答用紙に試験科目名、問題番号【Ｉ】の問１，問２、問題番号【Ⅱ】の問１、問２を忘れずに記入すること。

（３）解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる上部を空白にしておくこと。（この上部は切り離すので、点線部分より下側を使用すること）

（４）解答用紙は記入の有無にかかわらず持ち帰ってはならない。

【数学】

【I】

注意：**問 1**，**問 2** はそれぞれ別の解答用紙に解答すること．

問 1　次の漸化式を満たす実数の数列 $\{x_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ について，以下の設問に答えよ．なお，$a\ (\neq 0)$ は実数である．

$$x_{n+3} = 2ax_{n+2} + a^2x_{n+1} - 2a^3x_n$$

(i) この数列について，次式が成り立つ行列 A を求めよ．

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ x_{n+3} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{bmatrix}$$

(ii) 行列 A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ．

(iii) 任意の x_0, x_1, x_2 に対して数列 $\{x_n\}$ が収束するとき，実数 a が満たすべき必要十分条件を求めよ．

(iv) $a = \frac{1}{2}$ のとき，次式で与えられる A^∞ を求めよ．

$$A^\infty = \lim_{n \to \infty} A^n$$

（数学の問題は次ページに続く）

【数学】（続き）

問2　$\mathbb{R}$ は実数全体からなる集合，e はネイピア数（自然対数の底）とする．$x \in \mathbb{R}$ についての高々2次の実係数多項式の集合 V は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とみなせる．$x \in \mathbb{R}$ についての二つの連続関数 $f(x), g(x)$ に対する内積を

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

で定めると，V は上記の内積について内積空間となる．以下の設問に答えよ．

(i) 任意の $f(x) \in V$ と $g(x) \in V$ について，コーシー・シュワルツの不等式

$$\langle f, g \rangle^2 \leq \langle f, f \rangle \langle g, g \rangle$$

が成り立つことを示せ．

(ii) V の基底 $\{1, \sqrt{3}x, \sqrt{5}x^2\}$ が正規直交基底をなすか否かを，理由とともに示せ．

(iii) V の基底 $\{1, x, x^2\}$ は正規直交基底をなさない．グラム・シュミットの直交化法により，正規直交基底を構成せよ．

(iv) e^x $(x \in \mathbb{R})$ を多項式 $h(x) \in V$ を用いて，

$$\int_0^1 (e^x - h(x))^2 dx$$

が最小となるように近似したい．(iii) で求めた正規直交基底を用いて，$h(x)$ を求めよ．

（数学の問題は次ページに続く）

【数学】(続き)

【II】

注意：問1，問2はそれぞれ別の解答用紙に解答すること．

問 1　$\mathbb{R}$ を実数全体からなる集合とし，e をネイピア数（自然対数の底）とする．実数 $M > 0$ に対して xy-平面上の領域 $D(M)$ を

$$D(M) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0,\ Mx > y^2\}$$

とし，以下の積分を考える．ただし α, β は実定数とする．

$$I_{\alpha,\beta}(M) = \iint_{D(M)} \left(1 + \frac{y^2}{x}\right)^{-\alpha} \left(1 + \frac{x}{y^2}\right)^{-1/2} e^{-\beta(x+y^2) - \sqrt{x+y^2} + y} dx dy$$

この積分を求めるために，以下の写像によって変数 (x, y) を (z, w) に変換することを考える．

$$z = x + y^2, \quad w = \frac{y^2}{x + y^2}$$

以下の設問に答えよ．なお，以降では自然数 $n \geq 1$ について次式が成り立つことを用いてよい．

$$\int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt = (n-1)!$$

(i) 上記の写像による領域 $D(M)$ の zw-平面上の像 $E(M)$ を求めよ．

(ii) 以下の空欄に入る式を z, w, α, β を用いて表せ．

$$I_{\alpha,\beta}(M) = \iint_{E(M)} \boxed{}\, dz dw$$

(iii) $I_{0,0}(1/3) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^{1/4} \int_0^\infty e^{-(1-\sqrt{w})\sqrt{z}} \sqrt{z}\, dz dw$ の値を求めよ．

(iv) 任意の $\beta > 0$ に対して

$$\lim_{M \to \infty} \frac{\log I_{-1,\beta}(M)}{\log \log M} = 1$$

が成り立つことを示せ．

(数学の問題は次ページに続く)

問 2　x, y, z を直交座標系とする 3 次元実ユークリッド空間における 2 つの楕円体

$$E: \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$E': \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=3$$

を考える．ただし，a, b, c は正の定数とする．以下の設問に答えよ．

(i) E 上の点 $P(p, q, r)$ における E の接平面の方程式を求めよ．

(ii) E の外部の 1 点 $Q(l, m, n)$ をとる．Q を通る E の接平面すべてを考え，それらの接点の集合を W とする．W は，ある平面 S に含まれる（図 1）．平面 S の方程式を求めよ．

設問 (ii) で求めた S による E の切断面は楕円となる．以下ではこの楕円を R とする．

(iii) 設問 (ii) の点 Q が楕円体 E' 上にあるとき，R の中心座標 $T(x_0, y_0, z_0)$ を求めよ．

(iv) 設問 (ii) の点 Q が楕円体 E' 上を動くとき，設問 (iii) で示した R の中心座標について，各成分の積

$$J = x_0 y_0 z_0$$

が最大となる点 Q の座標 (l, m, n) とそのときの J の値を求めよ．

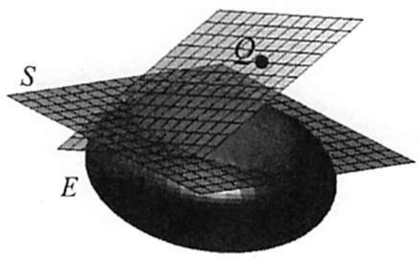

図 1:

(数学の問題はここまで)