２０２１年度１０月期入学 / ２０２２年度４月期入学

京都大学大学院情報学研究科修士課程

システム科学専攻　入学者選抜　試験問題

【専門科目】

試験日時：２０２１年７月３１日（土）　午後１時００分より同４時００分

問題冊子頁数（表紙、中表紙、裏表紙を除いて）：　１０頁

選択科目：下記の科目のうち、２科目を選択し解答すること。

【論理回路】（３）　　【工業数学】（３）

【基本ソフトウェア】（２）　　【確率統計】（３）

【制御工学】（３）

なお（ ）内数字は解答用紙の最大使用枚数を示す。

注意：

（１）上記科目から２科目を超えて選択してはいけない。３科目以上選択した場合は、本専門科目の答案を無効にすることがある。別紙の選択表への記入を忘れないこと。

（２）すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

（３）解答は上記最大使用枚数に注意すること。対応する解答用紙に解答中の科目名を明記すること。なお各問題に注意書きがあればそれに従うこと。

（４）解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる上部を空白にしておくこと。（この上部は切り離すので、点線部分より下側を使用すること。）

（５）解答用紙は記入の有無にかかわらず持ち帰ってはならない。

【論理回路】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること．

問題 1

n ビットの入力 $X_1X_2\cdots X_n$ によって，1 ビットの出力 Y が決まる論理回路を考える．値が 1 の入力ビットの総数が偶数であるときに $Y=1$, 奇数であるときに $Y=0$ が出力される回路として設計する．以下の設問に答えよ．

(1) $n=2$ とする．入力 X_1X_2 に対する出力 Y を X_1, X_2 の最簡積和形で表せ．

(2) 設問 (1) で求めた論理式を実現する回路をできるだけ少ない AND, OR, NOT 素子によって構成し，図示せよ．

(3) $n=8$ とする．入力 $X_1X_2\cdots X_8$ に対して Y が出力される回路を，設問 (1) で求めた論理式を実現する論理素子によって構成し，図示せよ．

問題 2

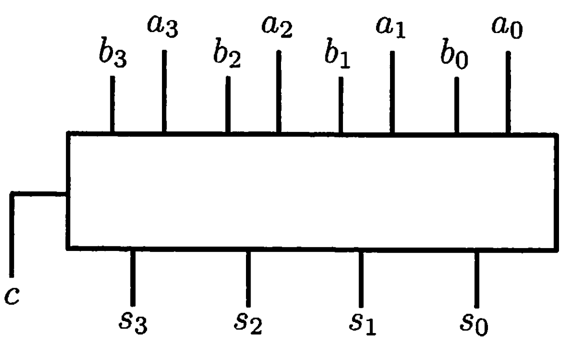
2 進数の乗算を行う組合せ回路を考える．以下の設問に答えよ．

(1) 次の 2 進数の乗算を計算せよ．

$$\begin{array}{rr} & 1101 \\ \times) & 1011 \\ \hline \end{array}$$

(2) 4 ビット 2 進数の乗算を実現する回路を 3 つの 4 ビット加算器と AND, OR, NOT 素子によって構成し，図示せよ．ただし，入力を a_0, a_1, a_2, a_3 と b_0, b_1, b_2, b_3, 出力を s_0, s_1, s_2, s_3 と桁上がり c とした図 1 の 4 ビット加算器を用いて図示して良い．

(3) 回路構成の工夫によって 4 ビット乗算器の遅延を小さくする方法を論じよ．



$$\sum_{i=0}^{3} a_i \cdot 2^i + \sum_{i=0}^{3} b_i \cdot 2^i = c \cdot 2^4 + \sum_{i=0}^{3} s_i \cdot 2^i$$

図 1: 4 ビット加算器回路

（論理回路の問題は次ページへ続く）

【論理回路】（続き）

問題 3

表 1 の状態遷移表によって定まる不完全定義順序回路に関する以下の設問に答えよ．なお，表中の **X**/Y の表記は次状態 **X** と出力 Y を示しており，– はドントケアである．

(1) 状態の併合によって状態数をできるだけ減らし，併合後の状態に新たな状態名を割り当てた状態遷移表を示せ．

(2) 設問 (1) で求めた状態遷移表を実現する順序回路を，D フリップフロップと AND, OR, NOT 素子によって構成し，図示せよ．

表 1: 状態遷移表

	入力			
状態	00	01	11	10
A	–/–	**C**/1	**E**/1	**D**/1
B	–/–	–/–	**D**/1	–/–
C	**F**/0	**F**/1	–/–	–/–
D	**E**/0	–/–	–/–	–/–
E	–/–	**F**/0	**A**/0	**B**/1
F	**C**/0	–/–	**D**/0	**C**/1

（論理回路の問題はここまで）

【工業数学】

注意: 問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること.

以下の設問において i は虚数単位, $\mathbb{C}$ は複素数の集合, $\mathbb{R}$ は実数の集合を表す. また複素数 z に対して, $\overline{z}$ は z の複素共役を, $\mathrm{Im}\, z$ は z の虚部をそれぞれ表す.

問題 1

(1) 以下の設問に答えよ.

(1-1) 偏角が $\pi/4$ である複素数の例を一つ挙げよ.

(1-2) 次式の値を求めよ.

$$2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}$$

(2) $a>0$ とする. 留数定理を用いて, 以下の実軸上の定積分の値を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{|a+ix|^2}$$

問題 2　以下の設問に答えよ.

(1) $\omega_1,\omega_2\in\mathbb{C}$ に対して, 条件「$\omega_1\omega_2\neq 0$ かつ $\mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1)\neq 0$」は, ω_1,ω_2 が $\mathbb{R}$ 上で線形独立であるための必要十分条件であることを示せ.

(2) $\mathbb{C}$ 上の関数 $f(z)$ および $\omega\in\mathbb{C}$ に対し, $f(z)$ が周期 ω をもつとは, 任意の $z\in\mathbb{C}$ に対して $f(z+\omega)=f(z)$ が成り立つことをいう. $\mathbb{C}$ 上の有理型関数 $f(z)$ が 2 つの周期 ω_1,ω_2 をもち, これらが $\mathbb{R}$ 上で線形独立であるとする. $c\in\mathbb{C}$ に対し, 領域 $\Delta=\{z=c+s\omega_1+t\omega_2, s\in[0,1], t\in[0,1]\}$ の境界 $\partial\Delta$ 上に f の極がないように c を選んだとき, Δ に属する f のすべての極に関する留数の和を求めよ.

(工業数学の問題は次ページに続く)

【工業数学】（続き）

問題 3　以下の設問に答えよ．ただし，C_r は複素数平面において原点を中心とする半径 r の円周上を正の向きに一周する経路とする．

(1) 以下の積分を求めよ．

$$\int_{C_r} \overline{z}\, dz$$

(2) S を，有限個の区分的 C^1 級曲線を境界とする $\mathbb{C}$ の有界領域とし，∂S を，S を左手に見る向きをもつ S の境界とする．複素数平面における S の面積を $|S|$ と表記すると，

$$|S| = \frac{1}{2i}\int_{\partial S} \overline{z}\, dz$$

が成り立つことを示せ．必要に応じて，以下の定理を証明なしに使ってよい．

グリーンの定理: D が $\mathbb{R}^2$ の有界領域で，有限個の区分的 C^1 級曲線を境界とするものとする．$P(x,y), Q(x,y)$ が $\overline{D}$ 上の C^1 級関数であるとき，等式

$$\iint_{\overline{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_{\partial D} (P\, dx + Q\, dy)$$

が成り立つ．ただし，$\overline{D}$ は領域 D の閉包であり，∂D は D を左手に見る向きをもつ D の境界である．

(3) 写像 $f(z) = \dfrac{z^2}{z-1}$ による C_r の像を γ_r とする．$r > 2$ のとき，γ_r は $\mathbb{C}$ において自己交差しない閉曲線となる．このとき，$\mathbb{C}$ において γ_r が囲む図形の面積を求めよ．

(工業数学の問題はここまで)

【基本ソフトウェア】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること.

問題1

以下に示すC言語の関数 f(a,n) は，n 要素 ($n > 0$) の unsigned char 型の配列 a の昇順ソートを，バケットソート (bucket sort) に類似したアルゴリズム（以下 A と呼ぶ）により行うものである．ただし unsigned char 型のデータの最大値は $2^8 - 1 = 255$ とする．この関数 f() について，設問 (1)〜(4) に答えよ．

```
#define R 256
void f(unsigned char *a, int n) {
  int h[R], g[R];
  int i, j, k, s;
  unsigned char x, y;
  for(i=0; i<R; i++)  h[i] = 0;
  for(i=0; i<n; i++)  h[(a)_______]++;
  g[0] = 0;  s = h[0];
  for(i=1; i<R; i++) {  g[i] = h[i-1] = s;  s += h[i]; }
  for(i=0; i<R-1; i++) {
    for(j=g[i]; j<(b)_______; j++) {
      x = a[j];
      while(x!=i) {
        s = g[x]++;
        y = (c)_______;  a[s] = (d)_______;  x = (e)_______;
      }
      a[j] = x;
    }
  }
}
```

(1) 下線部 (a)〜(e) をC言語の式で埋めて，関数 f() を完成させよ．なおその際，ソートに要する時間ができるだけ短くなるように配慮せよ．

(2) A の最悪時間計算量のオーダを，関数 f() の引数 n の値を N として求め，その根拠を簡潔に述べよ．

(3) A が安定か否かを示し，その根拠を簡潔に述べよ．

(4) 32 ビットの unsigned int 型の配列に対する基数ソート (radix sort) は，配列要素を 4 桁の 256 進数とみなし，各桁に対するバケットソートを下位桁から順に（下位優先型）あるいは上位桁から順に（上位優先型），繰り返し適用することで実現できる．A の基数ソートへの適用の可否を下位優先型と上位優先型のそれぞれについて示し，その根拠を簡潔に述べよ．

（基本ソフトウェアの問題は次ページに続く）

問題 2

4 コアで構成される単一 CPU で，処理時間と必要コア数が表 1 に示されるプロセス A〜E のスケジューリングについて考える．以下の設問に答えよ．ただし，すべてのプロセスは時刻 0 の時点ですでに到着しており，スケジューリングが完了しているものとする．また，すべての設問においてタイムスライスは 1 とし，プロセス切り替えに要するオーバーヘッドは無視できるものとする．

(1) スケジューリング方式 S によって得られる処理系列を示し，メイクスパン（全プロセスの終了時間）を求めよ．S は必要コア数の小さい順にスケジューリングするものであり，必要コア数が等しい場合は処理時間が短いプロセスを優先して実行する．

(2) 表 1 のプロセスを処理する場合，最短となるメイクスパンを示し，それを実現するスケジューリングについて論ぜよ．

(3) 表 1 のプロセス A〜E が表 2 に示されるメモリ領域 I 〜Ⅲをそれぞれ利用するとき，設問(1)のスケジューリング方式 S によって得られる処理系列を示し，メイクスパンを求めよ．ただし，同じメモリ領域を利用するプロセスは並列に実行できない．

(4) 設問(3)のようにメモリ領域に対して同時に 1 つのプロセスしかアクセスを許さない排他処理に関して，セマフォを用いた実現方法を論ぜよ．

表 1

プロセス	処理時間	必要コア数
A	1	4
B	4	2
C	3	2
D	2	1
E	3	3

表 2

プロセス	利用メモリ領域
A	Ⅱ
B	I
C	I
D	I
E	Ⅲ

（基本ソフトウェアの問題はここまで）

【確率統計】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること．

以下の問題において，$P(A)$ は事象 A の確率を表し，$P(A \mid B)$ は事象 B がおこったという条件のもとで事象 A がおこる条件付き確率を表す．また，e はネイピア数（自然対数の底）を表す．

問題 1

確率変数 X は確率密度関数

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

の指数分布にしたがう．ただし $\theta > 0$ はパラメータである．ある定数 $\theta_0 > 0$ に対して，帰無仮説 $H_0 : \theta = \theta_0$，対立仮説 $H_1 : \theta < \theta_0$ の仮説検定を有意水準 α $(0 < \alpha < 1)$ で行いたい．以下の設問に答えなさい．その導出過程も示すこと．

(1) 定数 $b > 0$ を定めておき，$X > b$ のとき H_0 を棄却する．この仮説検定の有意水準が α となるような定数 b を求めよ．

(2) 定数 $c > 0$ を定めておき，パラメータ θ の信頼区間を

$$S(x) = \left\{ \theta \,\middle|\, 0 < \theta \le \frac{c}{x} \right\}$$

とする．$P(\theta \in S(X)) = 1 - \alpha$ を満たすような定数 c を求めよ．

(3) 与えられた定数 $d > 0$ に対して，事象 $\{X > d\}$ を条件とする X の条件付き分布にしたがう確率変数を Y とする．すなわち，任意の $y > d$ に対して $P(Y > y) = P(X > y \mid X > d)$ である．定数 $b' > d$ を定めておき，$Y > b'$ のとき H_0 を棄却する．この仮説検定の有意水準が α となるような定数 b' を求めよ．

(4) 設問 (3) の確率変数 Y からパラメータ θ の信頼区間をつくりたい．ある関数 $h(y)$ を用いて，

$$T(y) = \{\theta \mid 0 < \theta \le h(y)\}$$

とする．$P(\theta \in T(Y)) = 1 - \alpha$ を満たすような関数 $h(y)$ を求めよ．

（確率統計の問題は次ページに続く）

【確率統計】　（続き）

問題2

以下の設問に答えなさい．ただし，$N(\mu,\sigma^2)$ は平均 μ, 分散 σ^2 の正規分布，$\mathrm{E}[\cdot]$ は期待値を表す．

(1) 独立ではないが無相関であるような実確率変数の組 X, Y の例を1つ挙げよ．またそれが独立ではないこと，無相関であることの証明も示せ．

(2) X と Y を独立に $N(0,1)$ に従う確率変数とする．$Z = X/Y$ が従う確率分布の確率密度関数を求めよ．

以下の設問では，次のように定義される関数 $\Gamma(a)$

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$$

および $a, b > 0$ なるパラメータを持つ確率密度関数 $g(x; a, b)$

$$g(x;a,b) = \begin{cases} (b^a\Gamma(a))^{-1}x^{a-1}e^{-\frac{x}{b}} & (x > 0) \\ 0 & (x \le 0) \end{cases}$$

を用いる．確率密度関数 $g(x; a, b)$ を持つ確率分布を $G(a, b)$ とする．また必要とあれば $a > 0$ に対して成り立つ等式 $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ を用いて良い．

(3) $G(a, b)$ に従う確率変数 X について，そのモーメント母関数 $M_X(r) = \mathrm{E}\left[e^{rX}\right]$ が有限であるような実数 r の条件を示し，そのときの $M_X(r)$ の値を求めよ．

(4) 確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は独立に $N(0, v)$ に従うものとする．このとき，$Y = \sum_{i=1}^n X_i^2$ は，あるパラメータ a_1, b_1 を持つ $G(a_1, b_1)$ に従う．このことを示すとともに，a_1, b_1 を v, n を用いて表せ．

(5) $G(a, b)$ に従う確率変数 X の期待値 μ と分散 σ^2 を a, b を用いて表せ．

(6) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を，パラメータ a, b が未知である $G(a, b)$ からの無作為標本とする．設問(5)の結果とモーメント法を用いて，a, b に対する推定値 $\hat{a}, \hat{b}$ を標本平均 $\bar{x} = (1/n)\sum_{i=1}^n x_i$, 標本分散 $s^2 = (1/n)\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ の関数として表せ．
ただしモーメント法とは，パラメータを K 個持つ確率密度関数 $f(x; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_K)$ のモーメント

$$m_k(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_K) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_K)\, dx$$

を標本モーメント $\hat{m}_k = (1/n)\sum_{i=1}^n x_i^k$ と等しいと置き，$\hat{m}_k = m_k(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_K)$ $(k = 1, \ldots, K)$ なる K 個の連立方程式を $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_K$ について解くことで，$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_K$ の推定値を得る方法である．

(確率統計の問題はここまで)

【制御工学】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること．

問題１　図１のフィードバック制御系において，伝達関数 $P(s)$ と $F(s)$ はそれぞれ以下の微分方程式で記述されるシステムを表すとする．

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - 5\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = u(t)$$
$$a\frac{dz(t)}{dt} + z(t) = y(t)$$

また,

$$K(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

とする．a, K_P, K_I, K_D は定数パラメータである．以下の設問に答えよ．

(1) 伝達関数 $P(s), F(s)$ と，r から y への伝達関数 $G_{yr}(s)$ を求めよ．

(2) $a = 0, K_P = 2, K_I = 0, K_D = 10$ のとき，単位ステップ入力 $r(t) = 1$ に対する応答 $y(t)$ を求めよ．

(3) $K_I = 1$ のとき，フィードバック制御系が安定となるような a, K_P, K_D の条件を求めよ．

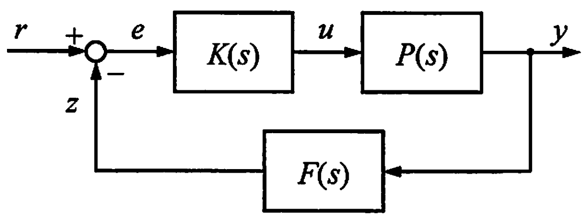


図１

（制御工学の問題は次ページに続く）

【制御工学】（続き）

問題 2　$P(s)$ は図 2 のようなベクトル軌跡を持つ伝達関数であり，それぞれの極は 0（重複はない）であるか実部が負である．図 2 の破線はベクトル軌跡の漸近線を表す．k は正の定数とする．以下の設問に答えよ．

(1) 図 3(a) のフィードバック制御系が安定であるような k の条件を求めよ．

(2) 図 3(a) のフィードバック制御系のゲイン余裕が 20dB 以上になるような k の条件を求めよ．

(3) 図 3(b) のフィードバック制御系が $[-0.25, 0.25]$ の範囲にあるすべての実数 δ に対して安定であるような k の条件を求めよ．

(4) 自然数 n と非負の実数 $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ に対して，$\dfrac{1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$ は図 2 のようなベクトル軌跡を持つ伝達関数とする．このうち n が最小であるようなものを求めよ．

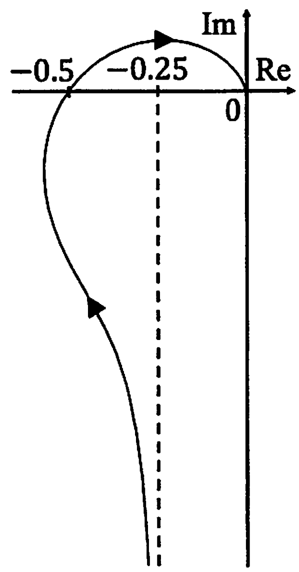


図 2

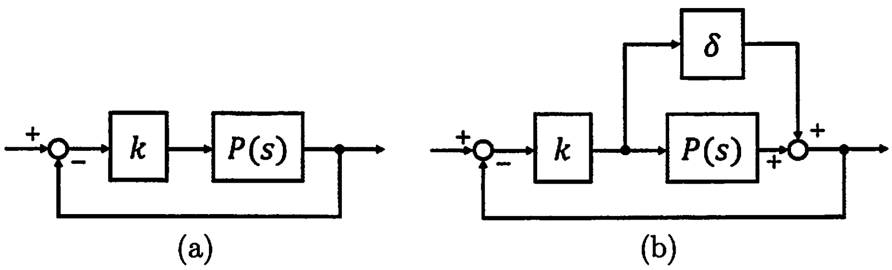


図 3

（制御工学の問題はここまで）