２０２０年度１０月期入学 / ２０２１年度４月期入学

京都大学大学院情報学研究科修士課程

システム科学専攻

入学者選抜　試験問題

【数学】

試験日時：２０２０年８月１日（土）　午前１０時００分より正午まで

問題冊子頁数（表紙、中表紙、裏表紙を除いて）：　４頁

注意：

（１）すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

（２）問題番号【Ⅰ】の問１、問２、問題番号【Ⅱ】の問１、問２のそれぞれについて別の解答用紙を使用して解答すること。その際、各解答用紙に試験科目名、問題番号【Ⅰ】の問１，問２、問題番号【Ⅱ】の問１、問２を忘れずに記入すること。

（３）解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる上部を空白にしておくこと。（この上部は切り離すので、点線部分より下側を使用すること）

（４）解答用紙は記入の有無にかかわらず持ち帰ってはならない。

【数学】

【I】

注意：【I】においては，行列 A の転置を $A^\top$ で表す．**問 1**，**問 2** はそれぞれ別の解答用紙に解答すること．

問 1　以下の設問に答えよ．

(i) 3 次元実数ベクトル空間を考える．$[1,1,1]^\top$ を基底とする 1 次元部分空間 V への正射影について，その射影行列と $[x,y,z]^\top$ の像を求めよ．また，V の直交補空間の正規直交基底を 1 つ求めよ．

(ii) 行列 A について，その階数と行列式の値を求めよ．また，逆行列があれば逆行列を求めよ．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(iii) 次のブロック行列 B の行列式の値 $\det B$ を求めよ．導出過程も示すこと．ただし，X，Y，Z はそれぞれ $n\times n$，$n\times m$，$m\times m$ の行列であり，$\det X \neq 0$ とする．また，O は $m\times n$ の零行列である．必要であれば，2 つの正方行列 P, Q について，$\det(PQ) = \det P \det Q$ であることを用いてよい．

$$B = \begin{bmatrix} X & Y \\ O & Z \end{bmatrix}$$

（数学の問題は次ページに続く）

問 2　以下の設問に答えよ．それぞれ，答えだけでなく，その理由についても示すこと．

(i) $n \times n$ の実数値対称行列 C の固有値を $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$，対応する固有ベクトルを $e_1, e_2, \cdots, e_n$ とする．ただし，e_i $(i = 1, \cdots, n)$ は互いに直交し，それぞれ長さ 1 の n 次元ベクトルである．n 次元ベクトル $x \neq 0$ に対して定義される

$$R(x) = \frac{x^\top C x}{x^\top x}$$

について考える．

(1) スカラー a_i $(i = 1, \cdots, n)$ を用いて，x を

$$x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n$$

としたとき，$R(x)$ を λ_i $(i = 1, \cdots, n)$，a_i $(i = 1, \cdots, n)$ を用いて表せ．

(2) $R(x)$ の最大値を λ_i $(i = 1, \cdots, n)$ を用いて表せ．また，その最大値を与える $x \neq 0$ はいかなるものか，a_i $(i = 1, \cdots, n)$ などを用いて示せ．

(3) $R(x)$ の最小値を λ_i $(i = 1, \cdots, n)$ を用いて表せ．また，その最小値を与える $x \neq 0$ はいかなるものか，a_i $(i = 1, \cdots, n)$ などを用いて示せ．

(ii) 3 つの実数 (x, y, z) が $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ を満たすとき，

$$J = 4x^2 + y^2 + 4z^2 + 4xy + 4yz - 2zx$$

の最大値と最小値を求め，それぞれを与える (x, y, z) をすべて示せ．

（数学の問題は次ページに続く）

【数学】(続き)

【II】

注意：各問題はそれぞれ別の解答用紙に解答すること.

$\mathbb{R}$ を実数全体からなる集合とし, $\mathbb{Z}$ を整数全体からなる集合とする. π を円周率とする. e をネイピア数 (自然対数の底) とし, $\exp(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}$ とする.

問 1　関数 $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ は連続関数であり, 次式を満たすものとする.

$$f(2x^2 - 1) = 2xf(x)$$

さらに, $\mathbb{G} = \{t \in \mathbb{R} : t \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$ とし, 関数 $g : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ を次のように定める.

$$g(t) = \frac{f(\cos t)}{\sin t}$$

このとき, 以下の設問に答えよ.

(i) $f(-1)$ および $f(1)$ の値を求めよ.

(ii) g が奇関数であることを示せ.

(iii) 任意の $t \in \mathbb{G}$ に対して, $g(t) = g(t/2)$ が成り立つことを示せ.

(iv) 次式が成り立つことを示せ.

$$g\left(1 + \frac{n\pi}{2^k}\right) = g(1), \qquad n, k \in \mathbb{Z}$$

(v) 関数 f を求めよ. なお, 導出過程も示せ.

(数学の問題は次ページに続く)

問 2　微分可能な関数 $f:(a,b)\to(0,\infty)$ と $g:(a,b)\to\mathbb{R}$ が以下のいずれかを満たすことを仮定する．ただし，$a<b$ とする．

(A) $\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)=1$ かつ $\displaystyle\lim_{x\to a+0} g(x)=\pm\infty$

(B) $\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)=\infty$ かつ $\displaystyle\lim_{x\to a+0} g(x)=0$

(C) $\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)=0$ かつ $\displaystyle\lim_{x\to a+0} g(x)=0$

このとき，次式が成り立つ．

$$\lim_{x\to a+0}(f(x))^{g(x)}=\exp\left(-\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)(g(x))^2}{f(x)g'(x)}\right) \qquad (1)$$

次の設問に答えよ．

(i) 次の値を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+0}(\sin x)^{\sqrt{x}}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\left(\frac{2}{\pi}\arctan\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} \qquad \left(-\frac{\pi}{2}<\arctan y<\frac{\pi}{2}\quad \forall y\in\mathbb{R}\text{ とする}\right)$

(ii) 関数 $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は2回微分可能であり，正の実数 p に対して次式を満たすことを仮定する．

$$h''(x)+h(x)=0, \qquad \lim_{x\to+0}(h(x))^{\frac{1}{x}}=p, \qquad \lim_{x\to+0}h(x)>0$$

関数 h を求めよ．

(iii) (A), (B), (C) のいずれかが満たされるとき，(1) 式が成り立つことを証明せよ．

(数学の問題はここまで)