２０２２年度１０月期入学 / ２０２３年度４月期入学

京都大学大学院情報学研究科修士課程

システム科学専攻

入学者選抜　試験問題

【数学】

試験日時：２０２２年８月５日（金）　午前１０時００分より正午まで

問題冊子頁数（表紙、中表紙、裏表紙を除いて）：　４頁

注意：

（１）すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

（２）問題番号【Ｉ】の問１、問２、問題番号【Ⅱ】の問１、問２のそれぞれについて別の解答用紙を使用して解答すること。その際、各解答用紙に試験科目名、問題番号【Ｉ】の問１，問２、問題番号【Ⅱ】の問１、問２を忘れずに記入すること。

（３）解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる上部を空白にしておくこと。（この上部は切り離すので、点線部分より下側を使用すること）

（４）解答用紙は記入の有無にかかわらず持ち帰ってはならない。

【数学】

【I】

注意：**問 1**，**問 2** はそれぞれ別の解答用紙に解答すること．

問 1　ベクトル x に関する m 元連立一次方程式 $Ax = b$ を反復法によって解くことを考える．そのために，m 次正方行列 A を $P - Q$ に分解し，方程式を $Px = Qx + b$ のように書き換え，適当な初期値 x_0 を与えて，$Px_{n+1} = Qx_n + b$，つまり，$x_{n+1} = P^{-1}(Qx_n + b)$ を繰り返し計算する．特に，行列 A の対角要素からなる対角行列を P とする反復法をヤコビ法と呼ぶ．以下の設問に答えよ．

ただし，m 次正方行列 Z の逆行列を Z^{-1}，転置を $Z^{\top}$，スペクトル半径を $\rho(Z)$ で表す．$\rho(Z)$ は Z の固有値 λ_i $(i = 1, \ldots, m)$ の絶対値の最大値 $(\max_i |\lambda_i|)$ に等しい．

(i) P^{-1} が存在するとき，$Px = Qx + b$ と $Px_{n+1} = Qx_n + b$ から，

$$x - x_{n+1} = P^{-1}Q(x - x_n)$$

となる．$P^{-1}Q$ の固有値がすべて異なるものとして，$n \to \infty$ のとき，任意の x_0 に対して x_n が方程式の解に収束するために $\rho(P^{-1}Q)$ が満たすべき必要十分条件をその理由とともに答えよ．

以下の設問では，次の方程式をヤコビ法を用いて解く場合について考える．

$$Ax = b,\ A = \begin{bmatrix} 12 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

(ii) P，Q，P^{-1} を求めよ．

(iii) $P^{-1}Q$ の固有値をすべて求めよ．さらに，$P^{-1}Q$ のスペクトル半径を求めよ．

(iv) $x_0 = [0, 0, 0]^{\top}$ として，x_1 を求めよ．

(v) A^{-1} を求めてから，方程式 (1) の解を求めよ．

（数学の問題は次ページに続く）

問2　行列 A は $n \times n$ の実対称行列で，その要素を $a_{ij}(i, j = 1, \ldots, n)$ と書く．さらに，すべての要素が非負であり，

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1,\ i = 1, \ldots, n$$

を満たすと仮定する．以下の設問に答えよ．ただし，u はすべての要素が 1 である n 次元ベクトルとする．

(i) $Au = u$ を示せ．

(ii) 任意の零ベクトルでない n 次元実ベクトル x に対して，x の要素の中で絶対値が最大のものを x_m としたとき，任意の $i \in \{1, \ldots, n\}$ において

$$\left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq |x_m|$$

が成り立つことを示せ．

(iii) A の任意の固有値 λ に対して，$|\lambda| \leq 1$ が成り立つことを示せ．

(iv) $n = 2$ とし，A は次の形

$$A = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{bmatrix},\ 0 < \alpha \leq 1$$

を取るとする．設問 (i) から，A は固有値 $\lambda_1 = 1$ と対応する固有ベクトル $v = u/\sqrt{2}$ を持つ．もう一方の固有値 λ_2 と対応する固有ベクトル w を求めよ．ただし w は正規化せよ．

(v) 設問 (iv) の A に対し，その自然数冪 A^k を考える．極限

$$B = \lim_{k \to \infty} A^k$$

が存在する α の範囲を答えよ．また，極限が存在する場合には，その極限 B を求めよ．

（数学の問題は次ページに続く）

【数学】(続き)

【II】

注意：問 1，問 2 はそれぞれ別の解答用紙に解答すること．

問 1　以下の設問に答えよ．以降では，e はネイピア数（自然対数の底），π は円周率を表す．

(i) $\lim_{x \to +0} x^{-1/2}(1 - e^{-x})$ を求めよ．

(ii) 以下の積分を求めよ．

$$\int_0^\infty x^{-3/2}\left(1 - e^{-x}\right) dx$$

ただし，以下が成り立つことを用いてよい．

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(iii) xy 平面上の閉領域 $D = \{(x, y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$ に対して以下の積分を求めよ．

$$\iint_D e^{x+y}\, dx\, dy$$

(iv) 実関数 $f(x)$ および $g(x) > 0$ が，それぞれ全ての実数 x に対して定義されていて単調増加であるとする．これらが $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ を満たすとき，

$$\sup_{-\infty < x < \infty} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$$

が成り立つ，すなわち $\frac{f(x)}{g(x)} \leq c$ が全ての実数 x で成り立つような定数 $c < \infty$ が存在することを示せ．

(数学の問題は次ページに続く)

問 2　直交座標系 O-xyz で表される 3 次元空間内の楕円面 $E : f(x, y, z) = 0$ を考える．ただし，

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{m^2} + \frac{z^2}{n^2} - 1$$

とし，l, m, n は正の定数とする．以下の設問に答えよ．

(i) 関数 $g(x, y, z) = xyzf(x, y, z)$ を考える．閉領域 $D = \{(x, y, z) : f(x, y, z) \leq 0\}$ において，関数 g の最大値と最小値を求めよ．

(ii) 楕円面 E の法線であって E 上の点 (x_0, y_0, z_0) を通るものの方程式を求めよ．

(iii) 関数 $h(x, y, z) = ax + by + cz$ を最大にする楕円面 E 上の点 (x, y, z) を求めよ．ただし，$(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ とする．

(iv) 3 点 $(p, 0, 0), (0, q, 0), (0, 0, r)$ を含む平面が楕円面 E と接している．この条件で p, q, r を動かしたときに $p^2 + q^2 + r^2$ の最小値を求めよ．

(数学の問題はここまで)