２０２２年度１０月期入学 / ２０２３年度４月期入学

京都大学大学院情報学研究科修士課程

システム科学専攻　入学者選抜　試験問題

【専門科目】

試験日時：２０２２年８月５日（金）　午後１時００分より同４時００分

問題冊子頁数（表紙、中表紙、裏表紙を除いて）：　１０頁

選択科目：下記の科目のうち、２科目を選択し解答すること。

【論理回路】（３）　　【工業数学】（３）

【基本ソフトウェア】（２）　　【確率統計】（３）

【制御工学】（３）

なお（ ）内数字は解答用紙の最大使用枚数を示す。

注意：

（１）上記科目から２科目を超えて選択してはいけない。３科目以上選択した場合は、本専門科目の答案を無効にすることがある。<u>別紙の選択表への記入を忘れないこと</u>。

（２）すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

（３）解答は上記最大使用枚数に注意すること。対応する解答用紙に解答中の科目名を明記すること。なお各問題に注意書きがあればそれに従うこと。

（４）解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる上部を空白にしておくこと。（この上部は切り離すので、点線部分より下側を使用すること。）

（５）解答用紙は記入の有無にかかわらず持ち帰ってはならない。

【論理回路】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること

問題 1

以下の論理関数 f の最簡積和形と最簡和積形をそれぞれ求めよ．

$$f(X_1, X_2, X_3, X_4) = \bar{X}_1\bar{X}_2\bar{X}_3\bar{X}_4 + \bar{X}_1\bar{X}_2X_3 + \bar{X}_1X_2\bar{X}_3X_4 + \bar{X}_1X_2X_3 + X_1\bar{X}_2\bar{X}_3$$

問題 2

2 進数の除算を行う組合せ回路を考える．以下の設問に答えよ．

(1) 次の 2 進数の除算（0101÷0011）を計算せよ．

$$0011\,\overline{)\quad 0101}$$

(2) 符号無し 4 ビット 2 進数の除算を実現する回路を全加算器と AND，OR，NOT 素子によって構成し，図示せよ．ただし，$\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$を$\{b_0, b_1, b_2, b_3\}$で除算を行った際の商（quotient）を$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$とし，余り（remainder）を$\{r_0, r_1, r_2, r_3\}$とする．また，図 1 の拡張された 1 ビット全加算器を用いて図示して良い．この全加算器では，入力 z が 1 の場合には，1 ビット入力 x と y と下の桁からの桁上がり C_i の和を出力 S，桁上がりを出力 C_o とする．入力 z が 0 の場合には，S として x を出力し，C_o は 0 となる．

(3) 符号無し 4 ビット除算器の回路構成から，除算器の特徴を加算器，乗算器と比べ，論じよ．

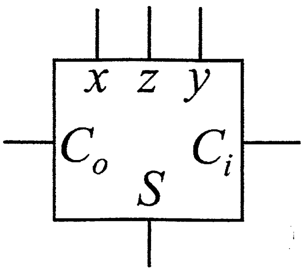


図 1　設問(2)の拡張された 1 ビット全加算器回路

（論理回路の問題は次ページに続く）

【論理回路】（続き）

問題3

表 1 の状態遷移表によって定まる不完全定義順序回路について以下の設問に答えよ．表中の **X/Y** の表記は次状態 **X** と出力 Y を示しており，－はドントケアである．例えば，現状態 **A** において入力 1 が与えられると，次状態 **B** に遷移して出力はドントケアである．

(1) この不完全定義順序回路の極大両立集合(maximal compatible set)を全て示せ．ただし，2 つの状態は，任意の印加可能な(applicable)入力系列に対する両者の出力系列が（一方あるいは両方の出力が定義されていない場合を除き）いつでも同じになる時，両立する(compatible)という．また，状態の集合は，それに含まれる任意の 2 つの状態の対が両立する時に両立集合と呼ばれ，両立集合はそれを真に包含する両立集合が存在しない時に極大両立集合と呼ばれる．

(2) 設問(1)で求めた極大両立集合のそれぞれに状態名を割り当てることで状態数を削減した順序回路の状態遷移表を示せ．

(3) 設問(2)で求めた状態遷移表を実現する順序回路を，D フリップフロップと AND, OR, NOT 素子によって構成し，図示せよ．

表 1：状態遷移表

現状態	入力 0	入力 1
A	**E**/－	**B**/－
B	**G**/－	**D**/－
C	**A**/ 0	－/－
D	**A**/ 1	－/－
E	**F**/－	**C**/－
F	**A**/ 1	**A**/ 0
G	**A**/ 0	**A**/ 1

（論理回路の問題はここまで）

【工業数学】

注意: 問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること.

以下の設問において i は虚数単位, e はネイピア数 (自然対数の底), π は円周率, $\mathbb{C}$ は複素数の集合, $\mathbb{R}$ は実数の集合をあらわす. また, 複素数 z に対して, $\overline{z}$ は z の複素共役を, $|z|$ は z の絶対値を, $\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$ は z の実部, 虚部をそれぞれあらわす.

問題 1　以下の設問に答えよ.

(1) 複素変数 z のべき級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} z^n$$

の収束半径を求めよ.

(2) 複素数 z の実部, 虚部をそれぞれ x, y とおく. ある領域 $D \subset \mathbb{C}$ で定義された $z = x+iy$ の複素関数 $w = f(z)$ が $w = \phi(x,y)+i\psi(x,y)$, $\phi(x,y) = \mathrm{Re}\, f(x+iy)$, $\psi(x,y) = \mathrm{Im}\, f(x+iy)$ の形で表現され, さらに D において関係式

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

が成り立つことを仮定する. ただし, u, v は x, y の関数である. このとき, 複素関数 $f(z)$ は D において正則であることを示し, 導関数 df/dz を u, v を用いてあらわせ.

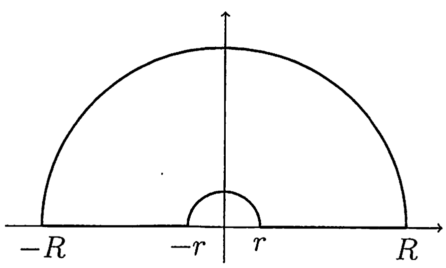
(3) 下図に示した閉路に沿った関数

$$f(z) = \frac{1 - e^{2iz}}{z^2}$$

の複素積分を考えることにより, 実定積分

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx$$

の値を求めよ.



(工業数学の問題は次ページに続く)

【工業数学】（続き）

問題 2　複素数 $z, w \in \mathbb{C}$ に対して，$F(z, w) = \mathrm{Re}(\bar{z}w)$ により関数 $F(z, w)$ を定義する．以下の設問に答えよ．

(1) 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して，$F(z, iz) = 0$ であることを示せ．

(2) $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ に対して $u = i(z_1 - z_2)$ とおく．$F(z_1, u) = F(z_2, u)$ が成り立つことを示せ．

(3) $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ がともに 0 でなく，さらに $z_1 = tz_2$ が成り立つような実数 t が存在しないとする．このとき，$F(z_1, z_3) = F(z_2, z_3) = F(z_1, z_2)$ が成り立つような複素数 z_3 を，z_1 および z_2 を使ってあらわせ．

問題 3　複素変数 z のべき級数により定義される関数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

について，以下の設問に答えよ．

(1) $f(z)$ を定義するべき級数の収束半径を R とする．任意の $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ および $0 < r < R$ をみたす任意の r に対し，不等式

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| \, d\theta$$

が成り立つことを示せ．

(2) $f(z)$ を定義するべき級数の収束半径が ∞ であるとする．さらに，ある非負の定数 a, b, m が存在し，$|z| > b$ をみたす任意の z に対して不等式

$$|f(z)| \leq a|z|^m$$

が成り立つとする．このとき，$f(z)$ は次数が m 以下の多項式であることを示せ．

(工業数学の問題はここまで)

【基本ソフトウェア】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること.

問題 1

以下に示すC言語の関数 f(a, n)は，n 要素（n > 0）int 型の配列 a の昇順ソートをあるアルゴリズム（以下 A と呼ぶ）により行うものである．この関数 f()について，設問(1)〜(4)に答えよ．

```
void f(int *a, unsigned int size) {
  int i, j, h, t;
  int d = 2;
  h = size / d;
  for(; h>0; h (a)    ) {
    for(i=h; i<size; i++){
      j = i;
      t = (b)     ;
      while((j>=h) && ((c)      >t)){
        a[j] = a[j-h];
        j = (d)     ;
      }
      (e)     = t;
    }
  }
}
```

(1) 下線部(a)〜(e)をC言語の式で埋めて，関数 f()を完成させよ．なおその際，ソートに要する時間ができるだけ短くなるように配慮せよ．

(2) A が安定か否かを示し，その根拠を簡潔に述べよ．

(3) A の最悪計算時間量のオーダを，関数 f()の引数 n について求め，その根拠を簡潔に述べよ．

(4) 関数 f 内で定義される変数 d（二重下線部）の値を変更し，それに伴い h（二重下線部）の式を変更することにより，A のアルゴリズムのソート性能を向上させる手法を論ぜよ．

（基本ソフトウェアの問題は次ページに続く）

【基本ソフトウェア】(続き)

問題2

単一コアで構成される単一CPUによる表1のプロセスのスケジューリングについて，以下の設問に答えよ．ただし，プロセスはA, B, C, Dの順に到着し，時刻 $t=0$ の時点で実行可能キューに存在するものとする．タイムスライスを1とし，プロセスの切り替えに要するオーバーヘッドは無視できるものとする．

(1) 次の **(a)**, **(b)** のスケジューリング方式によって得られる処理系列を示し，すべてのプロセスのターンアラウンド時間の合計を求めよ．

(a) 到着順スケジューリング（first-come first-served, FCFS）

(b) ラウンドロビン（round-robin）

(2) 実行可能キューに存在する各プロセスに対し，タイムスライスごとに二つのパラメータ p_t, q_t を割り当て，p_t の値が最小のプロセスを実行するスケジューリングを考える．ただし，p_t, q_t は $t=0$ では初期値が与えられ，$t \geq 1$ では以下の式に基づいて更新されるものとする．k は0以上の定数とする．

$$p_t = p_{t-1} + q_t$$

$$q_t = \begin{cases} k \times (q_{t-1} + 60) & \text{(プロセスが実行中の場合)} \\ k \times q_{t-1} & \text{(プロセスが実行中でない場合)} \end{cases}$$

なお，p_t, q_t の値はタイムスライスごとに小数点以下を切り捨て，整数とする．設問 (i)〜(iii) に答えよ．

(i) $k=0.5$ とすると，表2のように p_t, q_t が推移した．(ア)〜(キ) に入れるべき数値を答えよ．

(ii) $k=0.5$ かつ 表2で示す p_t, q_t の初期値の場合の処理系列を示し，すべてのプロセスのターンアラウンド時間の合計を求めよ．

(iii) k を小さくした場合と k を大きくした場合について，それぞれどのようなスケジューリングに近づくか，理由と共に答えよ．

表 1: プロセス一覧

プロセス	処理時間
A	4
B	2
C	5
D	2

表 2: パラメータの推移 (p_t/q_t)

時刻 t	0	1	2	3	4	5
A	0/0	30/30	(ア)	52/7	(オ)	101/16
B	20/0	20/0	(イ)	(ウ)	72/7	75/3
C	40/0	40/0	40/0	(エ)	85/15	(カ)
D	60/0	60/0	60/0	60/0	60/0	(キ)

(基本ソフトウェアの問題はここまで)

【確率統計】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること．解答に際して，導出過程も示すこと．

以下の問題において，$\log x$ は x の自然対数を表し，$P(A)$ は事象 A の確率を表す．また，$N(\mu, \sigma^2)$ は期待値 μ，分散 σ^2 の正規分布を表し，$X \sim N(0,1)$ の累積分布関数 $P(X \leq x)$ を $\Phi(x)$ で表す．正規分布に関する次の性質を解答に用いてよい．確率変数 $Z_1, \dots, Z_n$ が独立に正規分布 $Z_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, \dots, n$ にしたがうとき，$Z_1 + \cdots + Z_n$ は正規分布にしたがう．定数 a, b に対して，$aZ_1 + b$ は正規分布にしたがう．

問題1

確率変数 $X_1, \dots, X_m$, $Y_1, \dots, Y_n$ は独立に正規分布にしたがい，$X_i \sim N(\mu, 1)$, $i = 1, \dots, m$, $Y_j \sim N(\eta, 1)$, $j = 1, \dots, n$ とする．実数 μ, η は未知パラメータである．$X_1, \dots, X_m$ の標本平均を $\bar{X}$，$Y_1, \dots, Y_n$ の標本平均を $\bar{Y}$ とおく．このとき，以下の設問に答えよ．ただし，$\Phi(x)$，および $p = \Phi(x)$ の逆関数 $x = \Phi^{-1}(p)$ を解答に用いてよい．

(1) $\bar{X}$ のしたがう確率分布を求めよ．

(2) 帰無仮説 $H_0 : \mu = 0$，対立仮説 $H_1 : \mu = \mu_1, \mu_1 > 0$ の仮説検定を有意水準 α $(0 < \alpha < 1)$ で行いたい．そのために定数 c を定めておき，$\bar{X} > c$ のとき H_0 を棄却する．定数 c を求め，m, α を用いて表せ．

(3) 設問 (2) における検出力 β を求め，μ_1, m, α を用いて表せ．ここで検出力とは，対立仮説のもとで帰無仮説を棄却する確率である．

(4) 帰無仮説 $H_0 : \mu = \eta = 0$，対立仮説 $H_1 : \mu = \mu_1, \eta = \eta_1, \mu_1 > 0, \eta_1 > 0$ の仮説検定を有意水準 α $(0 < \alpha < 1)$ で行いたい．定数 d を定めておき，検定統計量 $T = (\sqrt{m}\cos\theta)\,\bar{X} + (\sqrt{n}\sin\theta)\,\bar{Y}$ が，$T > d$ のとき H_0 を棄却する．ただし，$\theta \in [0, \pi/2]$ は事前に定めておく定数である．定数 d を求めよ．

(5) 設問 (4) における検出力 β を求め，$\mu_1, \eta_1, m, n, \alpha, \theta$ を用いて表せ．また，β を最大にするように θ を定めたい．β の最大値，および最大値を実現するときの $\cos\theta$ を求めよ．

（確率統計の問題は次ページに続く）

【確率統計】　（続き）

問題2

以下の設問に答えよ.

(1) 任意の確率変数 X, Y に対する累積分布関数 $F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ は，$x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$ を満たす任意の x_1, x_2, y_1, y_2 に対して

$$F_{X,Y}(x_2,y_2) + F_{X,Y}(x_1,y_1) - F_{X,Y}(x_1,y_2) - F_{X,Y}(x_2,y_1) \geq 0$$

を満たす．その理由を述べよ.

(2) X_1 と X_2 を $(0,1)$ 上の一様分布にしたがう独立な確率変数とする.

$$Y_1 = \sqrt{-2\log X_1}\cos(2\pi X_2), \quad Y_2 = \sqrt{-2\log X_1}\sin(2\pi X_2),$$

によって定義される確率変数 Y_1, Y_2 の確率密度関数 $f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)$ を求めよ.

(3) Y は，$0,1$ を値にとる確率変数で，$P(Y=0) = P(Y=1) = 1/2$ とする．また X を，$Y=1$ のとき $N(0,1)$，$Y=0$ のとき $N(\mu,1)$ にしたがう確率変数とする．$f_{X|Y}(x|y)$ を $Y=y$ で条件付けられた X の条件付き確率密度関数，$f_X(x)$ を X の確率密度関数とする.

(3-1) $f_{X|Y}(x|y)$ および $f_X(x)$ を求めよ.

(3-2) Y は観測できず，f_X からの独立な確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ のみが観測されるとする．このとき，μ の最尤推定量 $\hat{\mu}$ の満たすべき方程式 ($\hat{\mu}$ の陰関数表示) を次の形

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} X_i p_i(\hat{\mu}, \boldsymbol{X})$$

で表示したときの $p_i(\hat{\mu}, \boldsymbol{X})$ を求めよ．ただし $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ であり，また $\sum_{i=1}^{n} p_i(\hat{\mu}, \boldsymbol{X}) = 1$, $p_i(\hat{\mu}, \boldsymbol{X}) \geq 0$ を満たすものとする.

(3-3) $n=1$ のとき，設問 (3-2) の $\hat{\mu}$ を求めよ．また，この $\hat{\mu}$ が μ の不偏推定量であるか否かを理由を付して答えよ．ただし $\mu \neq 0$ とする.

(確率統計の問題はここまで)

【制御工学】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること．

問題1　以下の設問に答えよ．

(1) 入力 $u(t)$ と出力 $y(t)$ の関係が微分方程式

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\sin y(t)=u(t)$$

で記述されるシステムにおいて，入力と出力がそれぞれ一定値 $u(t)=\bar{u}$，$y(t)=\bar{y}$ となる平衡状態を考える．$\bar{y}=\pi/2$ のとき，平衡状態からの入力と出力の微小変化をそれぞれ $\delta u(t)$，$\delta y(t)$ としてこの微分方程式を線形化し，δu から δy への伝達関数を求めよ．

(2) 伝達関数が

$$\frac{1}{(s+1)(s^2+2s+5)}$$

であるシステムのステップ応答を求めよ．

(3) 図1のフィードバック制御系において，

$$P(s)=\frac{1}{s^2+as+2},\quad K(s)=b+\frac{c}{s}$$

とする．ここで a,b,c は定数パラメータであり，$c\neq 0$ とする．$2\leq a\leq 5$ を満たすすべての a に対してフィードバック制御系が安定となる b,c の条件を求めよ．

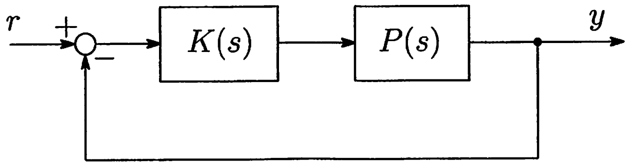


図1

(4) 設問(3)のフィードバック制御系において $a=1$ とする．単位ステップ入力 $r(t)=1$ に対する出力 $y(t)$ が $\lim_{t\to\infty}y(t)=1$ と $\left|\frac{d^2y}{dt^2}(0)\right|\leq 1$ を満たす b,c の条件を求めよ．

（制御工学の問題は次ページに続く）

【制御工学】(続き)

問題 2　位相進み補償

$$C(s) = k\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$$

は特定の周波数帯域で位相を進める働きをする補償器である．ただし，k, T は正の定数，α は 1 未満の正の定数である．このとき，次の命題が成り立つ．

> **命題 1** 周波数伝達関数 $C(j\omega)$ の位相の最大値は $\arctan\dfrac{1-\alpha}{2\sqrt{\alpha}}$ であり，この最大値は角周波数 $\omega_{\mathrm{m}} = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}T}$ に対して得られる．

以下の設問に答えよ．

(1) 角周波数 $\omega_{\mathrm{m}} = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}T}$ における周波数伝達関数 $C(j\omega)$ のゲインを求めよ．

(2) $k = 1, T = 2, \alpha = 0.1$ のときの $C(s)$ のボード線図の概形を描け．この際，軸上に主要な値を書き入れよ．ただし，ゲイン線図は折線近似でよい．また，近似値 $\arctan(0.9\sqrt{10}/2) \approx 55°$ を用いよ．

(3) 図 2 のような伝達関数 $P(s)$ と $K(s)$ のフィードバック制御系について考える．$K(s) = 1$ の場合の位相交差周波数が $\omega_{\mathrm{pc}} = 3$，ゲイン余裕が $GM = 3$dB であるとする．ここで，$\omega_{\mathrm{m}} = \omega_{\mathrm{pc}}$ を満たす位相進み補償 $C(s)$ によって，$K(s) = C(s)$ の場合の開ループ系の周波数伝達関数 $P(j\omega)K(j\omega)$ が次の 2 つの条件を満たすようにしたい．

　(a) 角周波数 ω_{pc} における位相が $-135°$ である．

　(b) 角周波数 ω_{pc} におけるゲインが 0 dB である．

　このような定数 k, T, α を求めよ．なお，近似値 $2 \approx 6$ dB を用いよ．

(4) 命題 1 を証明せよ．ただし，次の公式を用いてよい．

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

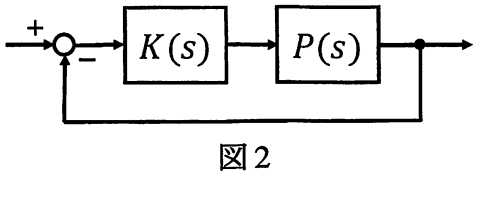


図 2

(制御工学の問題はここまで)