平成３０年度１０月期入学 / 平成３１年度４月期入学

京都大学大学院情報学研究科修士課程

システム科学専攻

入学者選抜　試験問題

【数学】

試験日時：平成３０年８月６日（月）　午前１０時００分より正午まで

問題冊子頁数（表紙、中表紙、裏表紙を除いて）：　２頁

注意：

（１）すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

（２）問題番号【Ｉ】の問１、問２，問題番号【Ⅱ】の問１，問２のそれぞれについて別の解答用紙を使用して解答すること。その際、各解答用紙に試験科目名、問題番号【Ｉ】の問１、問２，問題番号【Ⅱ】の問１，問２を忘れずに記入すること。

（３）解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる上部を空白にしておくこと。（この上部は切り離すので、点線部分より下側を使用すること）

（４）解答用紙は記入の有無にかかわらず持ち帰ってはならない。

【数学】

【I】

注意：**問 1**，**問 2** はそれぞれ別の解答用紙に解答すること．

問 1　行列 A を次のようにおく．

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -26 & 24 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(i) 行列 A の固有値をすべて求めよ．

(ii) 行列 $B = (A - I)((A - 2I)(A - 3I)(A - 4I) + I)$ とする．ここで，I は 3 次の単位行列である．B の固有値をすべて求めよ．

(iii) 設問 (ii) の行列 B について，$B^3 - 6B^2 + 11B$ を求めよ．

問 2　最初の 2 項が $x_0 = 2,\, x_1 = 1$ であり，それ以降，直前の 2 項の和として各項が定まる数列はリュカ数列と呼ばれる．この数列の各項 x_n がリュカ数である．10 項目までを計算してみると，2，1，3，4，7，11，18，29，47，76 となる．以下の設問に答えよ．

(i) リュカ数列の隣接する 3 項 x_n, x_{n+1}, x_{n+2} について，次式が成り立つ正方行列 A を求めよ．

$$A \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{bmatrix}$$

(ii) 正方行列 A の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ．

(iii) 正方行列 A の固有値 λ_1, λ_2 に対応する固有ベクトルを v_1, v_2 とする．v_1, v_2 を λ_1, λ_2 を用いて表せ．

(iv) 固有ベクトル v_1, v_2 が直交することを示せ．

(v) 正方行列 A の固有値 λ_1, λ_2 を用いて，リュカ数 x_n が次式で与えられることを示せ．

$$x_n = \lambda_1^n + \lambda_2^n$$

（数学の問題は次ページに続く）

【数学】(続き)

【II】

問 1　以下の設問に答えよ.

(i) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ の値を求めよ.

(ii) 関数 $f(x)$ は任意の $x \geq 1$ において微分可能であり, 次式を満たすとする.

$$f(1) = 1$$
$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{f(x)}+1}\left(\frac{1}{x^2+\{f(x)\}^2}\right)^2, \qquad x \geq 1$$

このとき, $\lim_{x\to\infty} f(x)$ が有限の値に収束することを示せ.

(iii) 設問 (ii) で考えた関数 $f(x)$ に対して, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) < \frac{5}{4}$ が成り立つことを示せ.

問 2　微分可能なスカラー関数 $g(x,y,z)$ に対して, $g(x,y,z)=0$ によって定義される 3 次元空間上の曲面を S と記す. S 上の点 (a,b,c) に対して, 以下の直線を点 (a,b,c) における S の法線という.

$$\frac{x-a}{g_x(a,b,c)} = \frac{y-b}{g_y(a,b,c)} = \frac{z-c}{g_z(a,b,c)}$$

ただし, $g(x,y,z)$ の x,y,z に関する偏導関数を g_x, g_y, g_z と表し, $g_x(a,b,c), g_y(a,b,c)$, $g_z(a,b,c)$ は全て 0 ではないとする. 一方, 点 (x,y,z) と点 (p,q,r) の距離の 2 乗を

$$f(x,y,z) = (x-p)^2 + (y-q)^2 + (z-r)^2$$

とおく. 次の設問に答えよ.

(i) 点 (a,b,c) が, S 上で点 (p,q,r) に最も距離が近い点であったとする. このとき, 点 (p,q,r) は点 (a,b,c) における S の法線上にあることを示せ. ただし, $g(x,y,z)=0$ を満たす (x,y,z) のうち, $f(x,y,z)$ を最小にする点 (x_*,y_*,z_*) は, 適当な定数 λ に対して次式を満たすことを利用せよ.

$$f_x(x_*,y_*,z_*) + \lambda g_x(x_*,y_*,z_*) = 0,\ \ f_y(x_*,y_*,z_*) + \lambda g_y(x_*,y_*,z_*) = 0,$$
$$f_z(x_*,y_*,z_*) + \lambda g_z(x_*,y_*,z_*) = 0,\ \ g(x_*,y_*,z_*) = 0$$

ここで, $f(x,y,z)$ の x,y,z に関する偏導関数を f_x, f_y, f_z と表す.

(ii) 次式によって定義される曲面を S_1 とおく. このとき, S_1 上の点 (a,b,c), $ab \neq 0$ における S_1 の法線を求めよ.

$$z = x^2 + y^2$$

(iii) 設問 (ii) の S_1 上に, 点 $(1, 2\sqrt{2}, 0)$ から最も距離が近い点が唯一ある. それを求めよ.

(数学の問題はここまで)